a integral do trabalho pode ser escrita como

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{\text{mudança de variável}} F(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(x)$$

$$t \to x \,, \qquad x(t_1) \equiv x_1 \,, \; x(t_2) \equiv x_2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \underline{dx}$$

" $\int_{x_1}^{x_2} dx\, F(x)$ é o trabalho realizado por F quando a partícula vai de x_1 para x_2 "

▸ <u>Def</u>. Energia potencial, $V(x)$

$$V(x) \equiv \int_{x}^{x_0} dx'\, F(x') = -\int_{x_0}^{x} dx'\, F(x')$$

" $V(x)$ é o trabalho realizado pela força quando a partícula desloca-se de $\underline{x}$ para um ponto de referência x_0 "

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, F(x) = \int_{x_1}^{x_0} dx\, F(x) + \int_{x_0}^{x_2} dx\, F(x)$$

$$= V(x_1) - V(x_2)$$

O Teorema de Energia fica:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, F v = V(x_1) - V(x_2) \,,$$

resultando em:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + V(x_2) = \frac{1}{2} m v_1^2 + V(x_1) \,,$$

o lado da direita depende apenas das condições iniciais do movimento e é portanto uma constante.

▸ Def. Energia total de um sistema, E

$$E \equiv K + V = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$$

'E é uma constante do movimento'
Seu valor pode ser avaliado nas condições iniciais.

Dada a energia E, podemos sempre integrar a equação do movimento:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}$$

Os pontos onde a velocidade se anula são chamados 'pontos de retorno'. Neles, a velocidade muda de sinal. Portanto, o sinal $\pm$ na frente de $\sqrt{\dots}$ depende do ramo do movimento.

Ponto de retorno x_r : $V(x_r) = E$

O movimento não possivel, nas regiões onde

$$E < V(x).$$

Temos

$$dt = (\pm)\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}},$$

integrando:

$$t - t_1 = \int_{x_1}^{x} \frac{dx'}{(\pm)\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}},$$

que é uma forma implícita para a trajetória da partícula. Em geral, é conveniente separar a integração em ramos, escolhendo um dado sinal da velocidade.

A força pode ser derivada do potencial $V(x)$ por:

$$F = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{d}{dx}V(x)$$

e não depende do ponto de referência x_0.

Se mudarmos x_0, a energia potencial muda por uma constante:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} dx'\, F(x')$$

$$= -\underbrace{\int_{x_0}^{x_0'} dx'\, F(x')}_{\text{cte.}} \underbrace{- \int_{x_0'}^{x} dx'\, F(x')}_{V'(x)} .$$

Ou:

$$V(x) = \text{cte.} + V'(x) .$$

<u>Exemplo (importante)</u>: Oscilador harmônico (OH)

Força de restauração linear:

$$F(x) = -Kx ,$$

a constante K é chama 'constante do OH'.

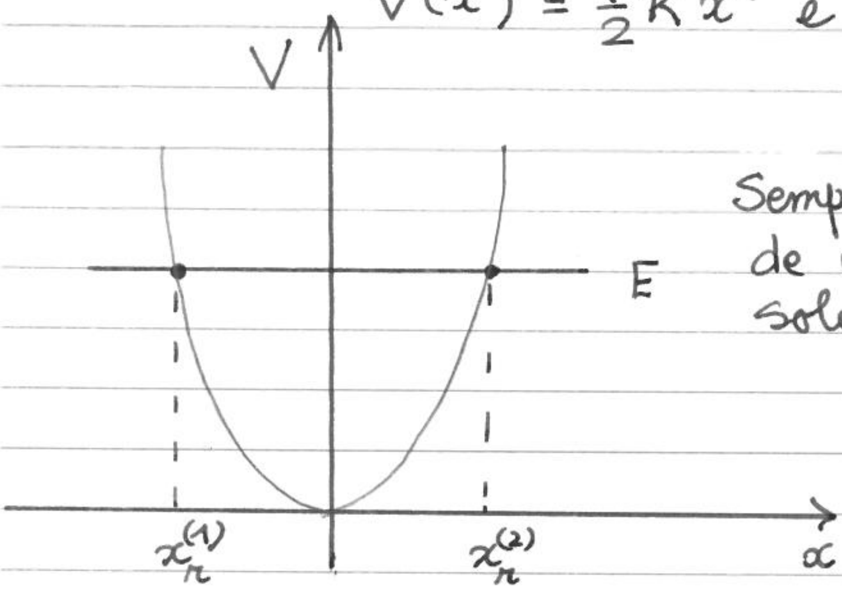
Calculamos a energia potencial $V(x)$:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} dx'\,(-Kx') = \int_{x_0}^{x} dx'\, Kx'$$

$$= \frac{1}{2}Kx^2 - \frac{1}{2}Kx_0^2 .$$

Escolhendo o ponto de referência como $x_0 \equiv 0$,

$$V(x) = \frac{1}{2} K x^2 \quad e \quad E > 0 \text{ sempre.}$$



Sempre temos dois pontos de retorno $(x_r^{(1)}, x_r^{(2)})$, soluções de:

$$x^2 = \frac{2E}{K},$$

o movimento clássico só é possível para

$$|x| \leq \sqrt{\frac{2E}{K}} \equiv A .$$

A é chamado de 'amplitude' do movimento. Sendo a posição inicial $x_1 \equiv 0$, consideramos o ramo de velocidade positiva, com $t_1 \equiv 0$ (tempo inicial):

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} K x'^2\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{K}{2E} x'^2}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x'}{A}\right)^2}}$$

mudar variável para $z \equiv \dfrac{x}{A}$

$$dx = A\,dz$$

$$t = A\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

$$t = \sqrt{\frac{\cancel{2E}}{K} \times \frac{m}{\cancel{2E}}}\ \mathrm{Arcsen}\left(\frac{x}{A}\right)$$

ou seja: $\sqrt{\dfrac{K}{m}}\,t = \mathrm{Arcsen}\left(\dfrac{x}{A}\right)$

• Def. Frequência natural do OH, ω

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

A eq. fica:

$$\omega t = \mathrm{Arcsen}\left(\frac{x}{A}\right),$$

que sendo invertida fornece:

$$x = A \,\mathrm{sen}\, \omega t.$$

A coordenada x oscila harmônicamente com frequência ω. No ponto de retorno:

$$x_{r}^{(2)} = A = A\,\text{sen}(\omega\,\Delta\tau)\,,$$

$$\Rightarrow \quad \omega\Delta\tau = \frac{\pi}{2}\,,\text{ou}\quad \Delta\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$\Delta\tau$ corresponde a um quarto do período T do movimento:

$$T = 4\,\Delta\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\,.$$

Velocidade:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos\omega t$$

Quando $\omega\Delta\tau = \frac{\pi}{2}$, a velocidade se anula e muda de sinal. Para condições iniciais arbitrárias, obtemos:

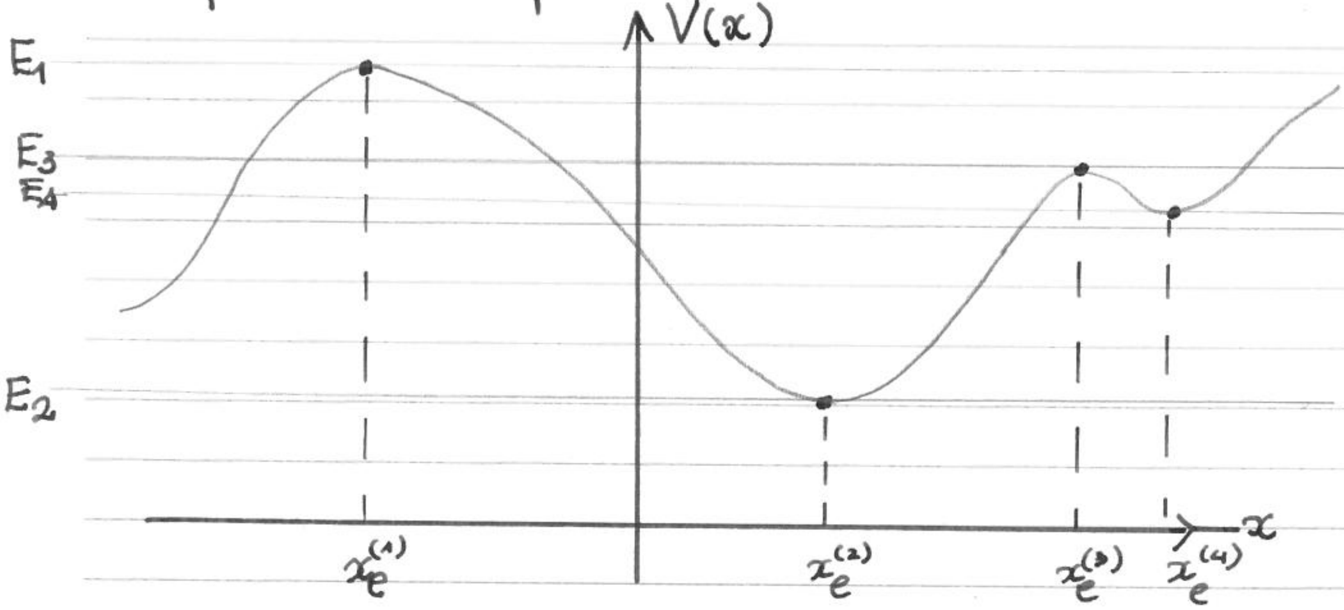
$$\omega(t - t_0) = \text{Arc sen}\left(\frac{x}{A}\right) - \text{Arc sen}\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

Definir : $\quad \text{Arc sen}\left(\frac{x_0}{A}\right) \equiv \theta_0\,.$

A inversão fornece:

$$x = A\,\text{sen}\left[\omega(t - t_0) + \theta_0\right]$$

Perfil de um potencial arbitrário:



▶ Def. Pontos de equilíbrio

São pontos onde a força é nula:

$$F(x_e) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_e} = 0$$

No gráfico temos 4 pontos $x_e^{(i)}$, $i = 1,2,3,4$ que satisfazem a definição. Para energias exatamente iguais a

$$V(x_e^{(i)}) = E_i \; ,$$

a partícula fica em repouso no ponto de equilíbrio. Desses pontos, $x_e^{(2)}$ e $x_e^{(4)}$ são de equilíbrio 'estável'. Os outros, $x_e^{(1)}$ e $x_e^{(3)}$, são chamados de equilíbrio 'instável'. O nome é atribuído segundo o comportamento do sistema mecânico para pequenas perturbações. Podemos distinguir esse comportamento segundo o valor de

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_e} \gtrless 0 :$$

i) Os pontos de equilíbrio estável são mínimos locais do potencial, com:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_e} = 0 , \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0 ;$$

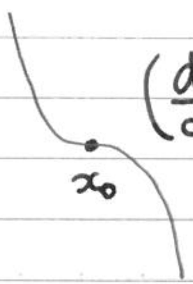
ii) para equilíbrio instável temos um máximo local, com:
$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_e} = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_e} < 0 .$$

Podemos também ter pontos 'degenerados', com efeitos não lineares:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} = \cdots = \frac{d^kV}{dx^k} = 0 , \text{ para } x = x_e .$$

A primeira derivada não nula, distingue entre estável e não-estável?

Possibilidade de 'selas':



$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0} = 0, \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} = 0$$

$$\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x_0} \neq 0$$

Consideremos um ponto de equilíbrio estável convencional x_0:

$$\frac{dV}{dx}(x_0) = 0 \, , \quad \frac{d^2V}{dx^2}(x_0) > 0 \, ,$$

que representa um mínimo não degenerado do potencial $V(x)$.

Para pequenos deslocamentos de equilíbrio

$$x' \equiv x - x_0 \, , \text{ pequeno},$$

podemos expandir o potencial em série de Taylor:

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \cdots$$

mais potências de ordem superior em $x' \equiv x - x_0$, que podem ser negligenciadas quando x' é suficientemente pequeno. Mas em equilíbrio temos:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0} = 0 \, , \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} \equiv k > 0 \, .$$

A expansão fica na forma:

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2} k \, (x - x_0)^2 + \cdots \, , \text{ com } V_0 = V(x_0) = \text{cte}.$$

Se mudarmos para a variável x' e desconsideramos a constante V_0, obtemos:

$$V(x') = \frac{1}{2} k x'^2,$$

que é o potencial do OH. De maneira que para todo mínimo não degenerado ($k \neq 0$, $k > 0$), o problema dinâmico pode ser aproximado por um OH para pequenos deslocamentos da coordenada

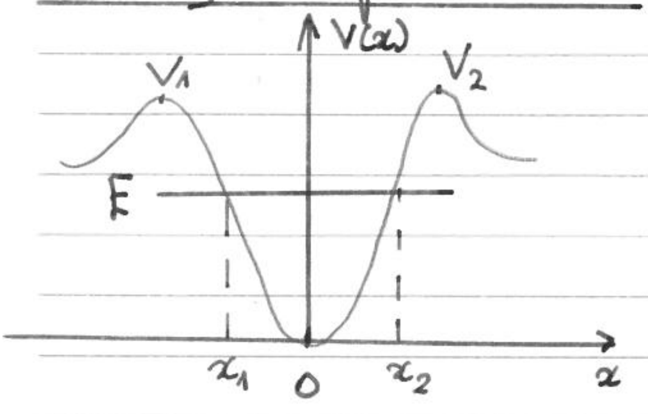
$$x' \equiv x - x_0 .$$

A frequência de oscilação é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} \cdot \frac{1}{m}}$$

- Casos especiais importantes

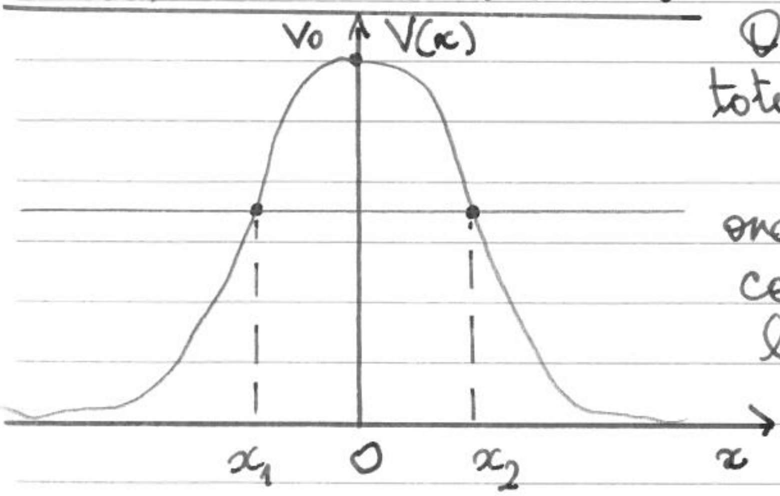
A. Poço de potencial



Para energias E, menor que os máximos, a partícula fica confinada, oscilando entre os pontos de retorno. Para a partícula escapar, precisamos de energia cinética maior que um dos máximos.

Se o mínimo em $x=0$, for não degenerado, a partícula executa oscilações simples para deslocamentos pequenos.

B. Barreira de Potencial



O potencial é nulo assintoticamente, para

$$x \to \pm\infty,$$

onde a partícula se comporta como partícula livre. Para energias menores que o máximo da barreira V_0, o movimento é limitado a um semiespaço, $x < x_1$ ou $x > x_2$, segundo se a partícula incide pela esquerda ou a direita. Ambos semi-espaços não se comunicam. Uma partícula que incide desde $\pm\infty$ é refletida elásticamente pela barreira.

§ Forças dependentes da velocidade

Até agora, temos considerado problemas conservativos, isto é onde a energia total é conservada. Isso não representa o caso geral, onde temos que considerar forças não conservativas associadas à dissipação da energia. Nestes casos, o movimento resulta amortecido, conduzindo ao repouso (forças de atrito, viscosidade, etc...). Desde o ponto de vista macroscópico, elas podem ser representadas como dependentes da velocidade, sendo opostas ao movimento. O caso mais simples é:

$$F(v) = -bv, \quad \text{com } b > 0$$

<u>Ex</u>. Seja o caso de uma partícula (1-dim), com velocidade inicial v_0 e sujeita a uma força de amortecimento

$$F(v) = -bv.$$

A eq. de movimento é:

$$m\frac{dv}{dt} = -bv,$$

que pode ser resolvida para a velocidade:

$$dv = \left(\frac{dv}{dt}\right)dt = -\frac{b}{m}v\,dt$$

ou $$\frac{1}{v}dv = -\frac{b}{m}dt.$$

Def.. Tempo caraterístico, τ :

$$\tau \equiv \frac{m}{b}$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad ,$$

onde $t_0 \equiv 0$, e dai:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -t/\tau \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-t/\tau} \quad ,$$

com $\quad v(t) = v_0\, e^{-t/\tau} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

A velocida decresce num fator $\frac{1}{e}$ num tempo igual a $\tau = \frac{m}{b}$.

Para a posição temos:

$$\frac{dx}{dt}(t) = v(t) = v_0\, e^{-t/\tau}$$

$$\int_{t_0=0}^{t} dt \left(\frac{dx}{dt}\right) = x(t) - x_0 = v_0 \int_{t_0=0}^{t} dt'\, e^{-t'/\tau}$$

$$= v_0 \left[-\tau\, e^{-t'/\tau}\right]_0^t = v_0 \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

resultando:

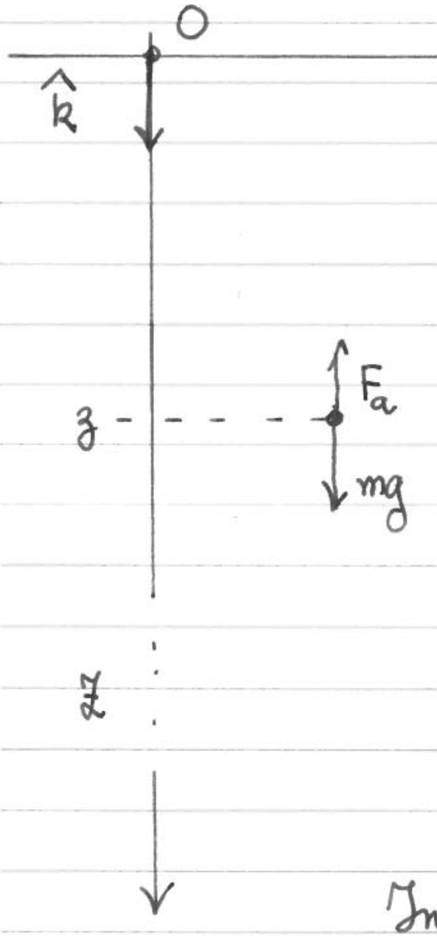
$$x(t) = x_0 + v_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

O espaço percorrido até a partícula se deter, é

$$x(\infty) - x_0 = v_0\tau,$$

que é percorrido assintoticamente para $t \to +\infty$.

<u>Ex</u>. Paraquedista:
Movimento puramente vertical, com velocidade inicial v_0, para baixo, $t_0 \equiv 0$



Eq. de Newton:

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{k} = (mg - \beta v)\,\hat{k}$$

$$dv = \left(\frac{dv}{dt}\right)dt$$
$$= \left(g - \frac{\beta v}{m}\right)dt$$

$$\frac{dv}{g - \frac{\beta}{m}v} = dt$$

Integrando ambos lados:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{g - \frac{\beta}{m} v'} = -\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v'\right)\Bigg|_{v_0}^{v}$$

$$= -\frac{m}{\beta} \ln\left(\frac{g - \beta/m\, v}{g - \beta/m\, v_0}\right) = t - t_0 = t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g - \beta/m\, v}{g - \beta/m\, v_0}\right) = -\frac{\beta}{m} t = -\frac{t}{\tau} ,$$

com $\tau \equiv \frac{m}{\beta}$. Assim, tomando a exponencial:

$$\frac{g - \beta/m\, v}{g - \beta/m\, v_0} = \frac{g\tau - v}{g\tau - v_0} = e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{v - g\tau}{v_0 - g\tau}$$

ou seja: $v - g\tau = (v_0 - g\tau)\, e^{-t/\tau}$

$$v(t) = g\tau + (v_0 - g\tau)^{-t/\tau} ,$$

com velocidade assintótica

$$v_\infty = v(\infty) = g\tau ,$$

e aceleração a_∞ nula.

Trajetória:

$$\frac{dx}{dt} = v = g\tau + (v_0 - g\tau)e^{-t/\tau},$$

integrando:

$$\int_{t_0}^{t} dt\left(\frac{dx}{dt}\right) = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} dt'\left[g\tau + (v_0 - g\tau)e^{-t'/\tau}\right]$$

$$= g\tau t + \left[-\tau(v_0 - g\tau)e^{-t'/\tau}\right]_0^t$$

$$= g\tau t + (v_0\tau - g\tau^2)\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

finalmente:

$$x(t) = \underbrace{x_0}_{0} + g\tau t + \tau(v_0 - g\tau)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$x(t) = g\tau t + \tau(v_0 - g\tau)\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Finalmente, a aceleração fica:

$$a(t) = g - \frac{v}{\tau} = \cancel{g} - \cancel{g} + \left(g - \frac{v_0}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$$

$$a(t) = \left(g - \frac{v_0}{\tau}\right)e^{-t/\tau},$$

mostrando que assintoticamente ($t \to +\infty$), a aceleração se anula:

$$a(t) = \left(g - \frac{v_0}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 .$$

Na prática, não é necessário esperar até $t \to +\infty$, porque o decrescimento exponencial é muito rápido.

Exercício
Symon, Cap. 2, prob. 19

Trata-se de força repulsiva:

$$F(x) = \frac{\alpha}{x^3} \quad , \alpha > 0$$

Seja $t_0 \equiv 0$, com condições iniciais:

$$v(t_0) = v_0 = 0 \, , \qquad x(t_0) = x_0 \, .$$

Como F depende apenas da coordenada x, o problema é conservativo. Calculamos a energia potencial:

$$V(x) = \int_x^{x_R} dx' \frac{\alpha}{x'^3} = -\int_{x_R}^{x} dx' \frac{\alpha}{x'^3}$$

$$= -\alpha \left[-2^{-1} (x')^{-2} \right]_{x_R}^{x} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x_R^2} \, ,$$

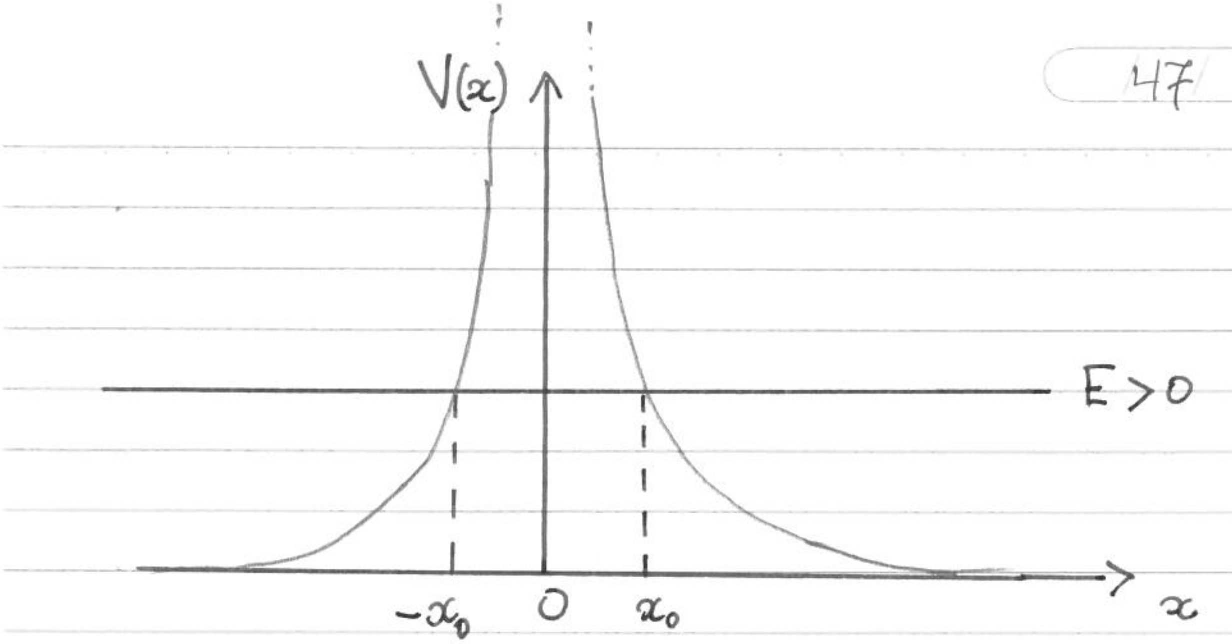
onde x_R é um ponto de referência. Como o potencial é singular na origem, é mais conveniente tomar o ponto de referência como

$$x_R \longrightarrow +\infty \, .$$

Neste caso:

$$V(x) = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x^2} \, , \quad \alpha > 0 \, ,$$

resulta repulsivo, com o ponto $x = 0$ singular.



O movimento fica restrito a um semi-espaço:

$$\text{ou} \quad x \geqslant x_0 \quad , \quad \text{ou} \quad x \leqslant -x_0 \ .$$

Ambos os espaços não se comunicam. Resolvemos a eq. de movimento para o semi-espaço $x \geq x_0$. A única maneira do sistema estar em repouso inicialmente, é ele partir de um ponto de retorno:

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x_0^2} = E \Rightarrow x_0 \doteq \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2E}} \ .$$

Consideramos $x_0 = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2E}} > 0$.

Da conservação da energia, obtemos:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E \;=\; \mathrm{d}\bar{\mathrm{e}} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x_0^2}$$

de onde:

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

ou seja:
$$\int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{\alpha}{2x^2}\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x} \frac{x' dx'}{\sqrt{x'^2 - \frac{\alpha}{2E}}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x} \frac{x' dx'}{\sqrt{x'^2 - x_0^2}}.$$

A integral é bem conhecida, porque:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 - x_0^2} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2 - x_0^2}}$$

ou seja:

$$\int_0^t dt' = t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{x'^2 - x_0^2}\,\Big|_{x_0}^{x}$$

$$= \sqrt{\frac{m\,\cancel{2}x_0^2}{\cancel{2}\alpha}} \sqrt{x^2 - x_0^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\alpha}x_0^2} \sqrt{x^2 - x_0^2}$$

ou $$\frac{\alpha}{m x_0^2} t^2 = x^2 - x_0^2$$

$$x^2 = x_0^2 + \frac{\alpha}{m x_0^2} t^2$$

Para o ramo positivo, obtemos:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\alpha}{m x_0^2} t^2} > 0$$